Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 3 – mathématiques discrètes

Lundi 8 mai 2017 (après-midi)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[50 points]**.

2217 – 7221

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 16]

(a) Utilisez l'algorithme euclidien pour trouver le plus grand commun diviseur de 264 et 1365. [5]

(b) (i) À partir de là ou par toute autre méthode, trouvez la solution générale de l'équation diophantienne

$$264x - 1365y = 3 .$$

(ii) À partir de là, trouvez la solution générale de l'équation diophantienne

$$264x - 1365y = 6 .$$ [8]

(c) En exprimant 264 et 1365 comme un produit de leurs facteurs premiers respectifs, déterminez le plus petit commun multiple de 264 et 1365. [3]

2. [Note maximale : 12]

Les poids des arêtes du graphe complet G sont donnés dans le tableau suivant.

	A	B	C	D	E	F
A	–	4	9	8	14	6
B	4	–	1	14	9	3
C	9	1	–	5	12	2
D	8	14	5	–	11	12
E	14	9	12	11	–	7
F	6	3	2	12	7	–

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

(a) En partant de A, utilisez l'algorithme des plus proches voisins pour trouver une borne supérieure au problème du voyageur de commerce pour G. [5]

(b) En effaçant d'abord le sommet A, utilisez l'algorithme du sommet effacé ainsi que l'algorithme de Kruskal pour trouver une borne inférieure au problème du voyageur de commerce pour G. [7]

3. [Note maximale : 9]

(a) Dans le contexte de la théorie des graphes, expliquez brièvement ce qu'on entend par

(i) un circuit ;

(ii) un circuit eulérien. [2]

(b) Le graphe G a six sommets et un circuit eulérien. Déterminez si son complément G' peut avoir ou ne peut pas avoir un circuit eulérien. [3]

(c) Trouvez un exemple d'un graphe H, ayant cinq sommets, tel que H et son complément H' ont tous les deux une chaîne eulérienne, mais aucun des deux n'a un circuit eulérien. Dessinez H et H'. [4]

4. [Note maximale : 13]

Considérez la relation de récurrence $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, où a, b et c sont des constantes. Soit α et β les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

(a) Vérifiez que la relation de récurrence est satisfaite par

$$u_n = A\alpha^n + B\beta^n,$$

où A et B sont des constantes arbitraires. [4]

(b) Résolvez la relation de récurrence

$u_{n+2} - 2u_{n+1} + 5u_n = 0$ étant donné que $u_0 = 0$ et $u_1 = 4$. [9]